



# 山崎研究室



## 研究室紹介

### 研究方針：

数理モデルを作ること、(物理として確立しているとは限らない)身の回りの現象の背景にある、普遍的な物理概念の抽出、理論構築を目指します。

### 分野：

- 統計物理・非線型動力学
- パターン形成の物理・数理
- 身近な現象の科学

### キーワード：

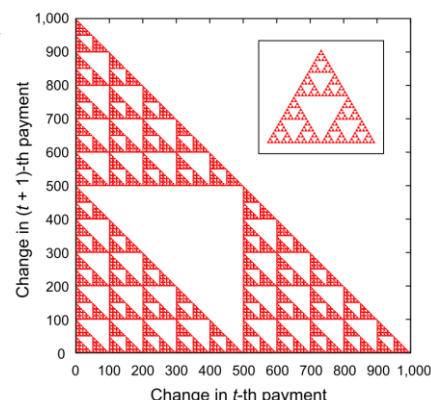
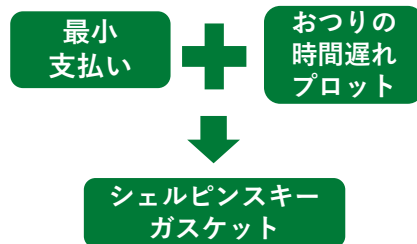
非平衡/分岐/相転移/パーコレーション/自己組織化/フラクタル/スケール不変性/ネットワーク/確率過程/超離散化

## 身近な現象の物理

身近に起こる現象にも様々な時間的・空間的パターン構造が観察されます。  
このような現象の背景にある**ダイナミクス**に着目し、そのメカニズムを理論的に探ります。

### おつりでもらう硬貨の数を最小にする 支払いに潜むフラクタル性

おつりを含めて財布に残る硬貨の枚数を最小にするような支払い方法を最小支払いと定義する。  
ランダムな金額の最小支払いを繰り返すと、おつりの金額の時間遅れプロットはフラクタル構造を示す。



K.Yamamoto and Y.Yamazaki, Fractal behind coin-reducing payment, Chaos, Solitons & Fractals, 45-8, 1058, (2012).

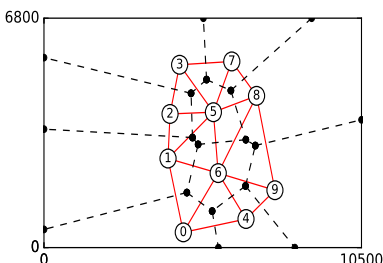
## スポーツの物理

**対戦型スポーツ**では特定のルールの下、敵・味方との不確定性を伴う相互作用が**階層的に**繰り返されます。  
このような系の理解には統計物理学の手法が有効です。

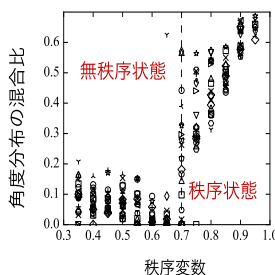
### サッカーの集団運動と選手間相互作用

**DATA:** 0.04秒ごとに取得したサッカーのトラッキングデータ

選手同士の隣接関係を**ドロネー分割**を用いて定義し、フォーメーションをネットワークの隣接行列として定量化した。これにより、フォーメーションの時間変化の解析や定量的な分類が可能となった。



**2選手**の**速度ベクトルの成す角**および**秩序変数**を用いて、選手の移動方向の揃い具合を特徴づけた。サッカーの試合は、全選手がボールを追いかける**秩序状態**と、最近接選手をマーキングする**無秩序状態**に分けられることが分かった。



- 1) T.Narizuka and Y.Yamazaki, Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics, 65-2, 299 (2017). arXiv:1802.06766
- 2) T.Narizuka and Y.Yamazaki, arXiv:1805.07525
- 3) T.Narizuka and Y.Yamazaki, Europhys.Lett.116, 68001 (2016). arXiv:1611.03880

## つながりの物理

多孔質媒体中の浸透現象や感染症の拡大など、**つながり**が系全体にひろがるか否かは様々な場面で重要な問題です。  
このような現象を理解するためのモデルに、**パーコレーション**と呼ばれる確率モデルがあります。

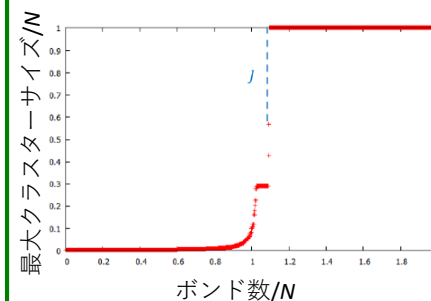
### 爆発的に起きるパーコレーション

つながりは一般に「ノード」と「ボンド」によって定義される**ネットワーク**として表現できる。ネットワークが大きなクラスターの形成を避けるように成長するとき、クラスターは**“爆発的に”**大きくなることが知られている。クラスターの成長がクラスターの確率的な合体によって表される場合について、そのようなふるまいが起きるための条件を明らかにした。

サイズ $C_i(t), C_j(t)$ のクラスターの合体確率

$$P(C_i, C_j; t) = \frac{C_i(t)C_j(t)}{N(N-1)-t} \times P_a(C_i, C_j; t),$$
$$P_a(C_i, C_j; t) = \begin{cases} 1, & C_i(t) + C_j(t) \leq \lambda \bar{s}(t+1) \\ 0, & C_i(t) + C_j(t) > \lambda \bar{s}(t+1) \end{cases}$$

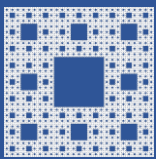
$t$ : ボンド数  
 $N$ : 全ノード数  
 $\bar{s}$ : 平均クラスターサイズ  
 $\lambda \geq 2$ : 定数



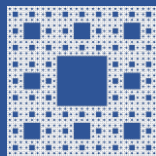
Y. Yamada and Y. Yamazaki, A Cluster-Size Averaging Model for Strongly Discontinuous Percolation, J. Phys. Soc. Jpn. 85, 055001 (2016).

早稲田大学 先進理工学部 物理学科  
西早稲田キャンパス 55号館 N棟 302号室  
山崎義弘 研究室  
<http://www.f.waseda.jp/yoshy/lab>





# 山崎研究室

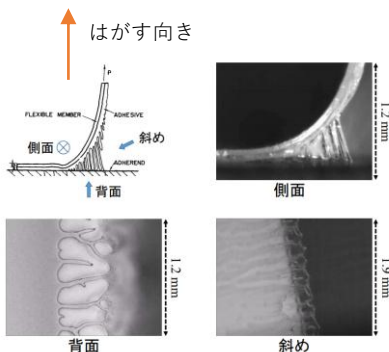


## パターン形成の物理

水にぬれた泥が乾燥したときにできるひび割れや、アスコルビン酸の結晶成長を観察すると、周囲の環境や条件によって**様々なパターン**が見出されます。テープのはがし跡にも、粘着力や剥離速度などの違いによって様々なパターンが見られます。

### 粘着の物理

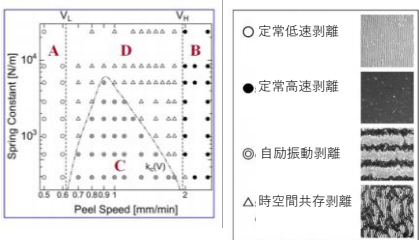
テープをはがすとき、剥離先端の高粘性流体(粘着材)に低粘性流体(空気)が押し込まれる。このとき平坦な境界が不安定化(フィンガリング不安定性)して周期構造が現れる。



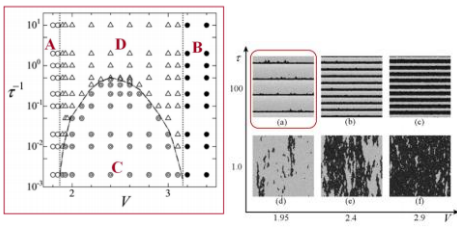
#### モデル

$$\begin{cases} \tau \frac{du}{dt} = (\bar{\phi} - V) - u, & \tau = \frac{N}{k} \\ \frac{d\phi_j}{dt} = -\phi_j(\phi_j - 1) \left( \phi_j - \frac{1}{2} \right) + D\{\theta(\phi_{j+1} - \phi_j) + \theta(\phi_{j-1} - \phi_j)\} - u + \xi_j \\ \theta(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

#### 実際の剥離パターンと相図



#### シミュレーション結果

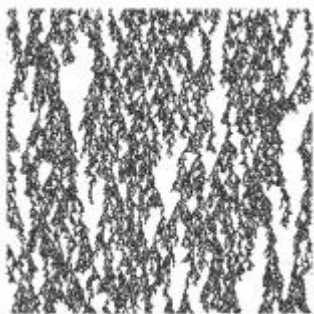


## セルオートマトンによるモデル化

#### 実際のパターン



#### セルオートマトン



$$\begin{cases} \text{第1ステップ (Rule254):} \\ p_j(0 \rightarrow 1) = f(\phi_{j-1} + \phi_{j+1})\lambda \\ \text{第2ステップ:} \\ \begin{cases} p_j(1 \rightarrow 0) = 1 - \frac{r}{\bar{\phi}}, \bar{\phi} > r \\ p_j(o \rightarrow 1) = \frac{r - \bar{\phi}}{1 - \bar{\phi}}, \bar{\phi} \leq r \end{cases} \end{cases}$$

- 1) Y.Yamazaki and A.Toda, Pattern Formation and Dynamics of Deformed Adhesive in Peeling, Physica D 214, 120-131 (2006).
- 2) Y.Yamazaki, Collective behavior of bistable units with global and asymmetric local interactions, Prog. Theor. Phys. 125, 641-652 (2011).
- 3) Y.Yamazaki, K.Yamamoto, D.Kadono and A.Toda, Spatiotemporal Patterns Formed by the Dynamics of Bistable Units with Global and asymmetric Local Interactions, J. Phys. Soc. Jpn. 81, 043002 (2012).

## その他の研究テーマ

- ・ 界面のダイナミクス
- ・ "ひも"のすべり
- ・ 熟語、Twitterなどのネットワーク解析
- ・ 交通流シミュレーション
- ・ 都市の人口移動
- ・ 同期現象
- ・ アスコルビン酸結晶のパターン形成 ...

## パターン形成現象と超離散化

時空パターンを解析する手法として、**セルオートマトン**と呼ばれる、時間・空間等の独立変数と従属変数が、すべて離散的な数理モデルを用いる事があります。連続な非線形微分方程式と完全に離散なセルオートマトンの両者に関係する時空パターン現象を、**超離散化の方法**を用いて研究しています。

### Fitzhugh-Nagumo 型反応拡散系に対する超離散法の適用

パルスダイナミクスを生み出すFitzhugh-Nagumo 型反応拡散方程式は、セルオートマトンの時間発展で表現できる解を持っている。この拡散方程式とセルオートマトンとを結びつける超離散化の方法により、反応拡散方程式から超離散方程式と呼ばれる差分方程式を導出し、その方程式の解として、パルスダイナミクスをあるルールに基づくセルオートマトンによって明示した。

**Fitzhugh-Nagumo型反応拡散方程式**
$$\begin{cases} \tau \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (u-a)(u-b)(u-c) - v \\ \tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa u - \lambda v + I \end{cases}$$

**超離散化**

**超離散方程式**
$$\begin{cases} U_j^{n+1} = \max\{W_j^n, T + \max(\Gamma + 2W_j^n, A + B + \Gamma)\} \\ \quad - \max\{W_j^n, T + \max(3W_j^n, B + \Gamma + W_j^n, V_j^n)\} \\ V_j^{n+1} = \max\{L_j^n, S + U_j^n, I\} \end{cases}$$

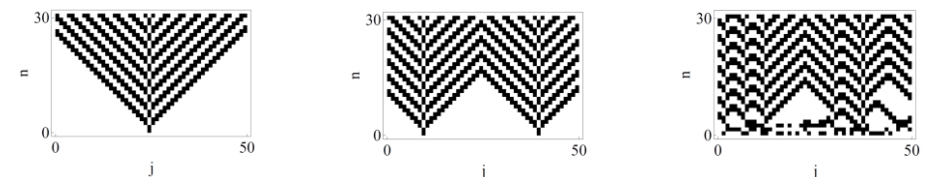
where  $W_j^n = \max[U_{j+1}^n, M + U_j^n, U_{j-1}^n]$ ,  $L_j^n = \max[V_{j+1}^n, N + V_j^n, V_{j-1}^n]$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{A/\epsilon} + e^{B/\epsilon} + \dots) = \max[A, B, \dots]$$

### 超離散方程式のセルオートマトンパターンルールとそのパターン

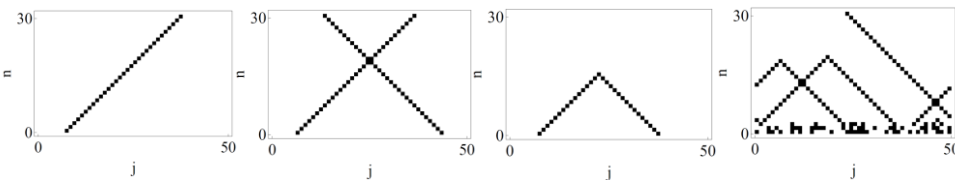
#### case1

| $U_j^{n-1}$                   | $\Gamma(A)$              | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$ |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| $U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n$ | $\Gamma, \Gamma, \Gamma$ | $\Gamma, \Gamma, A$ | $\Gamma, A, \Gamma$ | $A, \Gamma, \Gamma$ | $\Gamma, A, A$ | $A, \Gamma, A$ | $A, A, \Gamma$ | $A, A, A$   |
| $W_j^n$                       | $\Gamma$                 | $\Gamma$            | $\Gamma$            | $\Gamma$            | $\Gamma$       | $\Gamma$       | $\Gamma$       | $A$         |
| $U_j^{n+1}$                   | $A(\Gamma)$              | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$    | $A(\Gamma)$    | $A(\Gamma)$    | $A(A)$      |



#### case2

| $U_j^{n-1}$                   | $\Gamma(A)$              | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$         | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$    | $\Gamma(A)$ |
|-------------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| $U_{j+1}^n, U_j^n, U_{j-1}^n$ | $\Gamma, \Gamma, \Gamma$ | $\Gamma, \Gamma, A$ | $\Gamma, A, \Gamma$ | $A, \Gamma, \Gamma$ | $\Gamma, A, A$ | $A, \Gamma, A$ | $A, A, \Gamma$ | $A, A, A$   |
| $W_j^n$                       | $\Gamma$                 | $\Gamma$            | $\Gamma$            | $\Gamma$            | $\Gamma$       | $A$            | $\Gamma$       | $A$         |
| $U_j^{n+1}$                   | $A(\Gamma)$              | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$         | $A(\Gamma)$    | $A(A)$         | $A(\Gamma)$    | $A(A)$      |



パラメータと初期値を変えることで、異なる**セルオートマトンパターン**が生み出される。

S.Ohmori and Y.Yamazaki, Cellular automata for spatiotemporal pattern formation from reaction-diffusion partial differential equations, J. Phys. Soc. Jpn. 85, 014003 (2016).

早稲田大学 先進理工学部 物理学科  
大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻  
西早稲田キャンパス 55号館 N棟 302号室  
山崎義弘 研究室

<http://www.f.waseda.jp/yoshy/lab>

